RECENSIONI E PREFAZIONI

Toffalori, C. (2019). *L'equazione degli alef*. Bologna: il Mulino.

Recensione di Bruno D'Amore

Carlo Toffalori è un logico matematico molto stimato in Italia e nel mondo, ex presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni (AILA), ordinario di Logica matematica a Camerino. Ma è noto anche al vasto pubblico dei non specialisti a causa del suo interesse e del suo impegno nella divulgazione della Matematica e in primo luogo della Logica. Fautore di varie iniziative in questo senso, è anche lui stesso impegnato in prima persona in questa opera di alta divulgazione; alcuni suoi libri sono vere e proprie ghiottonerie per gli appassionati non specialisti della logica.

Ovviamente, citare gli alef in una collana che si chiama "Formule per leggere il mondo" non è che un modo per richiamare lo straordinario lavoro che fece Cantor in questo campo. Si tratta della creazione di una nuova categoria di numeri; partendo dal numerabile **n** (che è il cardinale dell'insieme N dei numeri naturali, dell'insieme Z degli interi, dell'insieme Q dei razionali, dell'insieme degli irrazionali algebrici) e proseguendo con **r** (che è il cardinale dell'insieme degli irrazionali trascendenti e dunque dei reali) e ammettendo che abbia senso scrivere che $2^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}$; ipotizzato poi che non ci siano insiemi di cardinalità maggiore di **n** e minore di **c** (ipotesi del continuo) e che dunque in qualche modo **c** segua **n** ($\mathbf{n} < \mathbf{c}$), si è di fronte a una nuova generazione di numeri (transfiniti) che richiedono nuove lettere per essere indicati, gli aleph, appunto. Con $\aleph_0$ indichiamo **n**, con $\aleph_1$ il suo successivo **c**, dunque $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Ma, ammessa questa scrittura, si può generalizzare il tutto, anche l'ipotesi del continuo, e giungere alla formulazione $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$. Sembra solo una questione di simbolismi appropriati (e quanto lo sono!), ma è invece un nuovo mondo, una nuova categoria di oggetti che mette tutta la matematica in discussione, aprendo fronti di ricerca e di studio unici e di una bellezza formale elegante e ineccepibile, il famoso Paradiso che, secondo Hilbert, Cantor aveva costruito per noi. E che spiega la famosa frase di Cantor: "La matematica merita (…) il nome di libera (…) l'essenza della matematica, infatti, sta proprio nella sua libertà".

Certo, la presentazione di tutto ciò e delle notevolissime conseguenze che ciò comporta nella logica, nell'intelligenza artificiale, nella vita di tutti i giorni, nel modo di guardare la matematica è incredibilmente ben descritta da Toffalori, con argomentazioni eleganti e acute, una sorta di narrazione e di analisi che spinge alla curiosità e che sorprende per la sua immediatezza, con un linguaggio attraente e convincente. Tante le sue citazioni, colte e profonde, sempre sul filo dell'equilibrio fra racconto, logica, formalismi e specifiche spiegazioni.

Ovviamente questa argomentazione ha comportato varie prese di posizione per quanto concerne la teoria degli insiemi e le sue varie assiomatizzazioni, tema che ha costituito per quasi un secolo un argomento di discussione in taluni momenti addirittura violenta e che ha costretto a rivedere daccapo la fondazione stessa della matematica.

L'Autore ci conduce anche attraverso questo impervio ma affascinante tema, dandoci tutte le nozioni che sono necessarie per capire il problema, teoremi e metateoremi che costituiscono l'ossatura di questa costruzione che offre un'affascinante prospettiva su quel che è oggi la logica.

Trovo affascinanti e perfino divertenti certi riferimenti a questioni concrete attuali, come il debito pubblico e lo spread.

Questo libro è destinato al più ampio pubblico possibile costituito da persone colte, anche non specialisti; ma io penso che un grande vantaggio da questa lettura ne avrebbero gli insegnanti di matematica, se grazie a questa lettura potessero trarre vantaggio culturale personale e poi, chissà, almeno con gli allievi più curiosi, potessero tentare un ingresso nel mondo misterioso degli aleph…

Lolli, G. (2019). *I teoremi di incompletezza*. Bologna: il Mulino.

Recensione di Bruno D'Amore

Il libro di Gabriele Lolli con questo titolo è una specie di calamita per chiunque ami la logica; su questo tema lo stesso Autore ha più volte scritto in precedenti pubblicazioni che hanno avuto fortuna editoriale, sia per il tema attraente e coinvolgente, sia per la maestria dell'Autore. Quel che sempre mi sorprende e mi avvince è che un libro (brevissimo) come questo, su questo tema, con questo linguaggio, può essere letto con piacere sia da uno specialista (che sempre troverà comunque qualcosa che lo sorprenderà) sia da un amante della logica non professionista (che resterà sorpreso dalle spiegazioni e dai mille riferimenti ghiotti).

La storia di questi teoremi è nota a tutti; mentre Peano e anche Hilbert, rifacendosi al "sogno" di Leibniz, dichiaravamo o speravano di aver creato sistemi logici in grado di decidere, in caso di controversie fra filosofi, chi avesse ragione, sulla base di un sistema logico semplice, formale, quasi a sorpresa, fra il 1930 e il 1931, il giovanissimo Gödel diede una mazzata a tutti, logicisti, intuizionisti, formalisti, … pubblicando quei teoremi che hanno cambiato la storia della logica (e non solo), mostrando concretamente che, in un sistema neanche tanto potente (capace di contenere almeno l'aritmetica elementare dei numeri naturali), è possibile costruire formule ben formate che, in quel sistema, non sono né dimostrabili né confutabili. Sappiamo che fu una vera sorpresa per i più, una meraviglia assoluta. Il mondo logico era allora affascinato e conquistato dagli studi sulle antinomie e molti dei logici più famosi dedicavano tutto il loro tempo a cercare di dipanare quella matassa aggrovigliata cercando di creare … antidoti, come la teoria dei tipi di Russell.

La proposta di rimedi contro le antinomie aveva almeno in parte scardinato alcune certezze e creato discussioni di estremo interesse, come il tentativo di chiarire in modo definitivo e completo che cosa dovesse intendersi per deduzione, un concetto che appariva (appare) a molti come quasi ovvio e ad altri come estremamente complesso. Lolli ci racconta la sequenza esatta degli eventi che costituirono la storia di quella bomba, la formulazione esatta del teorema e alcune successive modifiche effettuare dallo stesso Gödel e da altri logici, per esempio quella di Barkley Rosser che riduceva alcune richieste della tesi originale.

Naturalmente, come quasi sempre avviene in matematica, v'erano stati precedenti al teorema di Gödel e Lolli ce li racconta con molta profondità nel capitolo III, discutendo in dettagli l'accettabilità o meno di questi precedenti come tali. Nessuno di essi raggiunse la forza enunciativa e dimostrativa di Gödel e dunque nulla faceva davvero presagire questo evento. In tal senso, sono di estremo interesse le lettere che Emil Post ha inviato a Gödel, alcuni anni dopo la pubblicazione dei suoi teoremi.

Né si deve supporre che il risultato di Gödel e soprattutto la sua dimostrazione siano passati indenni rispetto all'analisi dei contemporanei; più d'uno ha tentato di contrastare e di invalidare questi formidabili teoremi. Ernst Zermelo, per esempio, fra i più noti. Ma molti altri matematici di primo piano intervennero, von Neumann, Russell, Wittgenstein, Popper e vari altri filosofi della scienza, non sempre ben consapevoli della portata dei teoremi di Gödel. Trovo molto interessanti le notizie che Lolli narra a proposito delle diverse reazioni dei matematici non logici a proposito dei risultati di Gödel, che sono le più diverse. Molto ho appreso da questo libro quando narra delle reazioni dei fisici, in primis Stephen Hawking. Molto interessante l'incursione che Lolli fa nel campo dell'arte figurativa, campo nel quale anch'io spesso mi lancio in quanto lo trovo per molti versi paragonabile, in quanto a temi, processi e interessi, a quello della matematica; qui, Lolli cita i giganti Magritte, Escher e Pistoletto, assai a proposito. Molto interessanti le considerazioni che, grazie ai suoi risultati, Gödel fa sulla matematica prima e sull'intelligenza artificiale poi, e che Lolli commenta con la solita indubbia profondità. Trovo affascinante l'ultimo capitolo dal titolo *Bellezza e magia*, nel quale si discute circa la bellezza della formula ideata da Gödel, ovviamente non in maniera frivola, ma basandosi su illustri citazioni di matematici che hanno parlato del tema assai controverso e delicato, la bellezza della matematica, tema che ha affascinato generazioni intere di matematici e che, anche se non sempre in modo esplicito, appare in modo molto presente nelle dichiarazioni di molti matematici anche contemporanei.

Credo che un simile testo dovrebbe essere letto da tutti coloro che, almeno una volta nella vita, hanno anche solo sentito citare il teorema di Gödel, anche se mai hanno dedicato tempo a leggerne l'enunciato o la dimostrazione, in una delle sue molte versioni (ricordo che esistono libri interi su questo tema, tentativi di rendere comprensibile ai non logici tale dimostrazione). Gli insegnanti di matematica, per esempio, per aumentare la capacità critica individuale della comprensione disciplinare, capire i limiti e i grandi traguardi della disciplina che insegnano, riconoscerne aspetti che altrimenti potrebbero essere basati su intuizioni poco fondate. Una lettura come questa amplia la mente, aumenta la capacità critica, dà ragione di temi affascinati e delicati che, altrimenti, se ignorati, possono banalizzare la nostra disciplina.

Maierù, L., & Florio, E. (2018). *Le costruzioni geometriche: Un percorso storico-didattico tra i matematici arabi dei secc. IX-XIII. Parte prima*. Roma: Aracne

Recensione di Bruno D’Amore

Luigi Maierù ed Emilia Florio sono due ben noti storici della matematica che da sempre pubblicano testi di estremo interesse sia per chi è appassionato di storia della matematica, sia per chi si occupa di didattica della matematica. Il fatto è che sempre più i didatti, ma anche i docenti delle scuole, specie secondarie, si sono convinti a usare eventi storici e personaggi della storia per raccontare non solo i risultati originali della ricerca matematica, ma anche la loro evoluzione e per presentare i protagonisti di questa grande avventura. Il fatto è che talvolta ci si dimentica che stiamo parlando di esseri umani e non di nomi vuoti, spesso decontestualizzati sia dal tempo sia dallo spazio, esseri umani che talvolta non si sanno collocare nell’evoluzione temporale, né nei luoghi.

Ora, che le vicende degli studi arabi su questioni di geometria così avvincenti fossero densi di significati e risultati eleganti e preziosi, è ben noto a tutti; ma, onestamente, questa dovizia di particolari e di eccellenza sorprende.

In questo bel libro, molto ben scritto e riccamente documentato, si incontrano personaggi assai noti anche al vasto pubblico, come Al-Khwārizmī e Na’īm ibn Mūsā, ma anche altri che (almeno a me) erano meno noti; ma ora, grazie a Luigi e a Emilia, sono felice di aver fatto la loro conoscenza.

Certo, il tema delle costruzioni geometriche, così caro alla Grecia classica, viene ripreso con ricchezza di mezzi e di particolari a dir poco stupendi, con perizia e creatività, sia fini a sé stessi, sia come strumento algebrico, per esempio per risolvere le equazioni di II grado, come fa per esempio Al-Khwārizmī (ma anche molti altri). D’altra parte, l’uso delle costruzioni geometriche per affrontare problemi di carattere algebrico è molto diffuso, com’è ben noto, e lo sarà ancora anche nelle successive tradizioni in tutta l’Europa mediterranea, Italia compresa.

A volte la costruzione geometrica ha il senso di una dimostrazione, come nel caso dell'enunciato-problema: "L'area di un poligono circoscritto a un cerchio è uguale al prodotto del raggio del cerchio per il semiperimetro del poligono". A volte sono strumenti per la ricerca, come nel caso della seguente sfida: "Trovare due grandezze tra due grandezze date in modo che le quattro grandezze si succedano secondo un medesimo rapporto".

Trovo fantastici alcuni problemi posti sulla parabola (più in generale sulle coniche); per un moderno, l'idea di dover rinunciare alla geometria analitica (ancora ben lungi dall'essere anche solo immaginata) sembra una folle eresia; ma siamo di fronte a metodi e ad astuzie che hanno dell'incredibile.

Molto interessanti le costruzioni di poligoni regolari e la risoluzione di problemi di geometria tridimensionale; in entrambi l'immaginazione messa in campo da questi matematici colpisce un moderno.

Certo, a questi grandi creatori non mancavano preziosi testi di ispirazione geometrica, come molti famosi dei matematici greci; ma questi matematici arabi non sono da meno, sanno dominare una geometria potente e preziosa, sanno inventare, creare.

Una cosa che mi ha colpito molto è stato lo studio sugli specchi ustori di Ibn Sahl, dato che, nei primi anni '80, mi dedicai allo studio dello stesso tema così com'è affrontato da Bonaventura Cavalieri, alcuni secoli dopo. Anche in questo caso, il riferimento alla leggenda archimedea è solo una scusa per uno studio dettagliato delle proprietà delle coniche.

Tutti i problemi della Ellade classica sono presenti, anche la trisezione dell'angolo generico negli scritti di Al-Qūhī.

Che strumento didattico potrebbe costituire questo libro (e, in genere, questo genere di libri) nelle mani di un docente di scuola secondaria di II grado? Una fonte di ispirazione, forse capace di aumentare l'interesse e la curiosità degli studenti.

Ora, però, gli Autori e il lettore si chiederanno: ma come mai D'Amore, che recensisce sempre tutto al volo (questa è la mia 965ª recensione pubblicata), ci ha messo due anni a recensire questo libro?

Scherzo delle poste; sembra che questo volume mi sia stato inviato appena uscito, nel mese di marzo del 2018, essendo io membro del comitato scientifico della collana "Matematiche Complementari – Fondamenti, storia e didattica della Matematica" della casa editrice Aracne. Che razza di percorso postale abbia compiuto il plico non mi sarà mai dato di sapere; fatto sta che mi è pervenuto solo nel mese di ottobre del 2019 … Io l'ho subito letto e recensito, dicembre 2019. Ma poi si è dovuto attendere la pubblicazione della rivista cui la mia recensione è stata inviata, aprile 2020, insomma davvero due anni dopo la pubblicazione.

Nella storia della matematica le lungaggini postali sono ben note, bastì pensare alla celebre lettera di Archimede ad Eratostene; e alla più famosa lettera (fra le tante) di Cantor a Dedekind (ma qui, come è ben noto, sto scherzando!).

Per cui, chiedo scusa al lettore, agli Autori e all'editore, ma non potevo essere più celere. Speriamo nel futuro.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia, Vol. III: Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Prefazione di Luigi Pepe. Bari: Dedalo.

Recensione di Paolo Negrini

Nel terzo volume dell'opera *La matematica e la sua storia*, gli Autori Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli narrano gli sviluppi di questa disciplina dal Rinascimento al XVIII secolo. Si tratta di un periodo storico straordinariamente fecondo per la matematica; nella premessa introduttiva leggiamo che "Nel XVIII secolo (…) ci sono stati più risultati matematici che non nell'insieme di tutti i secoli precedenti". Gli argomenti di cui parlare sono dunque innumerevoli, di natura estremamente varia, niente affatto semplici da sintetizzare. Non si può raccontare la matematica in modo superficiale: anche se non ci si rivolge a un pubblico di specialisti occorre approfondire i temi trattati, per comprenderne la sostanza. Gli Autori, esperti ricercatori in didattica della matematica, raggiungono brillantemente l'obiettivo di offrire un'esposizione adatta a una platea molto ampia, ma avvincente anche per un lettore competente. I diversi capitoli alternano il dettagliato racconto dei progressi scientifici nelle varie branche della matematica a episodi significativi nella vita degli artefici delle diverse teorie; la lettura è piacevole e coinvolgente: quasi come in un romanzo giallo, terminato un capitolo si desidera proseguire, per sapere come si sviluppa la vicenda.

Nel periodo storico analizzato, la matematica interagisce sempre più profondamente con altre branche del sapere, non soltanto scientifico. I primi tre capitoli, dedicati al Rinascimento, raccontano fra l'altro la celebre disputa fra Tartaglia, Cardano e Ferrari riguardo alla risoluzione delle equazioni cubiche, oggetto di approfondita ricerca, non più soltanto strumenti per risolvere problemi concreti; e poi la prospettiva, finalmente studiata in base a precise regole geometriche. Due nomi emergono su tutti: Leon Battista Alberti e Piero della Francesca. Costoro, noti al grande pubblico per altri meriti: formidabile architetto il primo, magnifico pittore il secondo, forniscono anche un contributo fondamentale al progresso della matematica.

Il quarto capitolo riprende l'argomento della prospettiva descrivendo nascita e sviluppo della geometria proiettiva, una scienza la cui eleganza giustifica qualunque sforzo per il suo studio. Il capitolo citato ne illustra quanto basta per farci comprendere il suo fascino e indurci ad approfondire.

Una grande conquista per la matematica è l'introduzione di un conveniente simbolismo algebrico. François Viète e René Descartes sono i principali artefici di questa vera rivoluzione, che dà un impulso formidabile al progresso dell'algebra. Se ne parla nel capitolo 3, dove è pure ricordata un'altra straordinaria creazione, il cui merito va principalmente a Descartes: la geometria analitica.

I capitoli 5 e 6 trattano principalmente i secoli XVII e XVIII, i più ricchi di nuove scoperte e creazioni, come dicevamo sopra. Alcune stelle brillano più intensamente: Euler, Leibniz, Newton; ma non è da sottovalutare l'opera di altri valenti matematici i quali, pur senza raggiungere lo stesso livello di genio, contribuiscono efficacemente al progresso della matematica offrendo spunti che i tre grandi riescono mirabilmente a sviluppare, oppure elaborando e mettendo a punto le idee di questi ultimi.

Euler, "principe dei matematici", si cimenta in diverse direzioni. È noto anche ai meno esperti come creatore della teoria dei grafi, ispirata da un problema alquanto futile riguardo a certe passeggiate nella città di Königsberg e lungo i ponti che in questa città attraversavano il fiume Pregel, e per la relazione tra il numero di vertici, spigoli e facce di un poliedro; ma sono fondamentali i suoi contributi allo studio e alle applicazioni delle funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

Lo studio dei logaritmi e delle loro proprietà aveva avuto grande impulso nei secoli XVI e XVII per merito di diversi matematici, tra i quali John Napier, latinizzato Nepero. Egli fu tra i primi a compilare dettagliate "tavole di logaritmi". Lo scopo iniziale era fornire uno strumento per facilitare l'esecuzione di operazioni altrimenti molto laboriose; in effetti le tavole di logaritmi sono state utilizzate come ausilio al calcolo fino agli anni '70 del XX secolo, rese obsolete soltanto dalla diffusione delle calcolatrici tascabili.

Nell'ultima parte del secolo XVII prende forma una delle più straordinarie creazioni della matematica: il calcolo infinitesimale, ossia l'analisi matematica. Gottfried Wilhelm von Leibniz e Isaac Newton, quasi contemporaneamente e indipendentemente l'uno dall'altro, portano a compimento le idee di Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli, Pietro Mengoli e altri, realizzando uno degli strumenti più potenti per lo studio di molteplici problemi. Leibniz pone l'accento sulla ricerca di minimi e massimi; a questi è infatti dedicato il titolo del fondamentale lavoro in cui egli espone la nuova teoria. Newton, fisico, rivolge maggiore attenzione alle applicazioni riguardanti lo studio dei moti. Il capitolo 6 è dedicato alle opere di questi due geni, ma è anche ricordato il lavoro di altri valenti matematici; tra questi il marchese de l'Hôpital, ben noto a tutti gli studenti. In realtà, molti dei meriti scientifici del marchese andrebbero condivisi con Johann Bernoulli, che collaborò in modo essenziale alla stesura delle sue opere.

Il settimo e ultimo capitolo è dedicato alle "macchine da calcolo". Il racconto si estende opportunamente a un periodo storico assai più ampio di quello annunciato nel titolo del libro: sono macchine da calcolo le tavole con sassolini (*calculi*, da cui il verbo *calcolare*) già in uso nell'antichità; poi gli abachi medioevali, strumenti che, con poche modifiche, sono tuttora utilizzati, per esempio in Giappone e in alcuni paesi dell'Europa orientale, e ancora i "bastoncini" di Napier, fino alle macchine meccaniche per il calcolo di Pascal e di Leibniz. Le calcolatrici meccaniche o elettromeccaniche della prima parte del XX secolo non aggiungono granché alla potenza di questi strumenti, fino all'avvento dell'elettronica.

Il capitolo, corredato da numerose e affascinanti illustrazioni, si chiude con un accenno alla rivoluzione del calcolo elettronico, al genio di Alan Turing e John Von Neumann, senza approfondire ma dando le notizie essenziali.

Con un po' di spiritosa malizia gli Autori si congedano, consapevoli di averci offerto un'opera gradevole e istruttiva, e di averci infuso il desiderio di proseguire la lettura appena avranno completato il prossimo volume, il IV, ultimo della corposa tetralogia, al quale stanno già lavorando da tempo.

Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2019). *Le relazioni fra area e perimetro dei poligoni: Alcune riflessioni matematiche, storiche e didattiche*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Bologna: Pitagora.

Recensione di Laura Branchetti

Il libro costituisce un'importante risorsa per insegnanti e ricercatori nell'ambito didattico. Nel volume gli Autori riorganizzano, sistematizzano e ampliano i risultati di alcune ricerche realizzate all'inizio degli anni duemila, già pubblicate in un volume del 2006, ora riviste e arricchite di nuove riflessioni. I contenuti matematici oggetto della ricerca sono semplici all'apparenza e costituiscono temi essenziali dell'insegnamento della matematica nella scuola primaria, con innumerevoli applicazioni e sviluppi nei percorsi scolastici successivi, fino all'università: l'area e il perimetro. Può sorprendere che temi come questi siano al centro di un intero volume e che a ricerche didattiche su questi temi di base siano state dedicate così tante risorse ed energie: cosa c'è da indagare da un punto di vista didattico su argomenti così semplici? Eppure, di fronte ai risultati di tali ricerche, presentati in modo meticoloso e dettagliato sia dal punto di vista teorico che empirico, si è costretti a cambiare idea. Non solo sul tema specifico, ma sulla complessità dell'apprendimento della matematica in generale, e sulla necessità di una ricerca didattica e una formazione che, in maniera decisa, porti i docenti a riflettere a fondo sul sapere matematico di base e sulle criticità che da sempre accompagnano l'insegnamento di questa disciplina.

L'impatto del sapere e delle convinzioni degli insegnanti sui processi di apprendimento dei loro studenti è infatti notevole, per ovvie ragioni, ed è stato documentato in numerose ricerche condotte anche dagli Autori stessi. Questa assunzione è fondamentale nella lettura del testo, che identifica nella variabile "insegnante" la fonte principale delle difficoltà di apprendimento degli studenti relative a queste tematiche: numerosi ostacoli didattici, dovuti a un sapere che non supera di tanto l'oggetto dell'insegnamento stesso, si aggiungono infatti agli ostacoli epistemologici che caratterizzano area e perimetro, che contribuiscono a loro volta a minare e rendere fragile e incerto il sapere dei docenti.

Prima ancora di ragionare sulle difficoltà, nel libro vengono discusse alcune abitudini dell'insegnamento della geometria attraverso i libri di testo e vengono riesaminati i contenuti matematici, come si suol dire, "da un punto di vista superiore", riproposti dagli Autori in maniera precisa ma anche accattivante e originale, con l'aiuto della riflessione storica sull'origine e lo sviluppo di questi saperi. In seguito gli Autori guidano i lettori, con riflessioni ed esempi presi dalla letteratura nazionali e internazionale, alla scoperta dei fattori che possono stare alla base delle difficoltà degli studenti e dei futuri insegnanti; difficoltà che, secondo gli Autori, sembrano essere addirittura in forte aumento negli ultimi anni, a tutti i livelli di istruzione.

Andando a indagare con pazienza, curiosità e competenza le convinzioni e le immagini mentali che si formano spontaneamente su area e perimetro nei processi di apprendimento, al di là di ciò che è oggetto di insegnamento esplicito, e che rimangono parte del bagaglio di molti docenti, gli Autori ci mostrano concezioni spontanee e inattesi collegamenti tra le due nozioni, che emergono in situazioni che si discostano, seppur di poco, da quelle "da libro di testo". La prospettiva e gli strumenti teorici della ricerca didattica aiutano a identificare e comprendere le difficoltà e prospettare soluzioni, e a interpretare associazioni apparentemente insensate e inspiegabili tra i due concetti dal punto di vista della matematica, intesa come rigoroso corpus di conoscenze storicizzate e formalizzate, che assumono invece senso cambiando il punto di vista sulla pratica d'aula e analizzando i processi di costruzione della conoscenza.

Tra i risultati più interessanti delle ricerche condotte dagli Autori si trovano, ad esempio, alcune relazioni tra area e perimetro che vengono interiorizzate dagli studenti in casi particolari e generalizzate spontaneamente e inconsapevolmente, diventando proprietà che caratterizzano i due concetti e finiscono per diventare i veri criteri usati dagli studenti per rispondere alle domande nei quesiti di matematica o nella risoluzione di problemi.

Per quanto la scuola dell'infanzia e la scuola primaria siano maggiormente, e più direttamente, coinvolte da questa riflessione, le concezioni e i modelli intuitivi emersi dalla ricerca degli Autori possono rimanere immutati anche in studenti di scuola secondaria di primo e secondo grado, fungendo da modelli parassiti che ostacolano l'apprendimento di altri concetti o influenzano gli studenti nei processi di risoluzione di problemi. Anche se ai docenti sembra che gli studenti dimentichino continuamente e con grande facilità e superficialità quanto sembravano aver appreso anche solo poche settimane prima, ci sono apprendimenti molto profondi, spesso difficili da far emergere, che lasciano traccia quasi indelebile nella mente degli studenti e modelli intuitivi che continuano ad "agire" ed essere riattivati anche molti anni dopo la loro formazione. Per tale ragione è molto importante che anche i docenti di scuola secondaria siano al corrente dei risultati di tali ricerche; è infatti su questi saperi di base che dovranno far costruire ai loro studenti nuovo sapere e nuova competenza matematica. I modelli intuitivi che si sono rafforzati nel corso degli anni continueranno a ripresentarsi rendendo difficile da parte dei docenti un intervento "correttivo", soprattutto se il docente non è al corrente della natura di tali concetti e delle convinzioni degli studenti, quasi mai esplicitate.

Gli studenti di oggi sono gli adulti di domani, e tra loro, naturalmente, troviamo, senza sapere chi saranno, i futuri insegnanti di matematica, di ogni ordine e grado. Senza una riflessione mirata, chi non ha avuto occasione di mettere a fuoco nel suo percorso scolastico alcune complessità dei concetti di area e perimetro, si ritroverà nel suo lavoro di docente a confrontarsi con esse nel momento più critico, cioè quello in cui esse si manifestano in alcune domande inattese degli studenti, o nella risoluzione di un problema diverso da quelli più standard. Richiamando le parole degli Autori:

> Per esempio, decidere se ci sono relazioni tra perimetro e area di una figura, supera le competenze di molti studenti, soprattutto perché, come abbiamo verificato, supera quelle di parecchi insegnanti; se poi questa figura fa parte di una successione di figure in trasformazione, allora la competenza quasi si annulla… (p. 12)

Come sottolineano gli Autori, le ricerche presentate offrono spunti notevoli soprattutto per la formazione degli insegnanti, grazie a riflessioni dei docenti stessi e a resoconti dettagliati delle attività di formazione. Per tale ragione questo volume costituisce una risorsa importante anche per i ricercatori che si occupano di formazione degli insegnanti, oltre che per i docenti stessi, che possono ripensare al loro sapere e riflettere sulle loro concezioni, a partire dalle riflessioni di altri docenti.

Gli Autori riescono a rivolgersi a un pubblico molto eterogeneo, con la loro consueta capacità di coinvolgere ed essere al tempo stesso meticolosi e precisi. La lettura di questo testo è in grado sia di stimolare riflessioni generali sull'apprendimento, che possono incontrare i gusti di un vasto pubblico, sia fornire strumenti operativi utili per la professione docente e per i formatori.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). *Le difficoltà di apprendimento in matematica: Il punto di vista della didattica*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Agnese Del Zozzo

Questo volume fornisce gli strumenti necessari a orientarsi nel mondo delle specificità che si incontrano nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Ricordo con affetto di averlo accolto come guida nel mio percorso di studi, fin dalla pubblicazione di una sua prima versione, nel 2008. Ma questa nuova versione del 2019 è assai più ampia e più estesa.

Il lettore che parte alla scoperta del meraviglioso mondo della didattica della matematica troverà in questo libro una mappa, in cui sono tracciati percorsi e pericoli, e una luce per districarsi nelle dinamiche d'aula e rivelarne le delicatezze.

L'espressione *difficoltà di apprendimento in matematica* può essere ingenuamente o frettolosamente interpretata solo come la difficoltà di qualcuno (il tal allievo) in qualcosa (le frazioni). Gli Autori conducono invece un'analisi della questione dal punto di vista didattico più generale e scientifico, e sfruttano i risultati della ricerca degli ultimi decenni per svelare quanto la suddetta interpretazione sia illusoria.

Innanzitutto, l'apprendimento, nel caso della matematica, ha delle specificità delle quali è necessario tenere conto. Nel testo si fa continuo riferimento ad esse e riguardano sia la natura degli oggetti matematici che il processo di insegnamento-apprendimento in sé. Inoltre, come esplicitamente analizzato nell'ultimo capitolo, le dinamiche d'aula si caratterizzano per le relazioni interpersonali che ivi si instaurano. Questo significa che sarà necessario considerare opportunamente tutte le declinazioni e le sfumature di tali relazioni e dei modi in cui esse possono influenzare il processo di insegnamento-apprendimento.

Gli Autori ci rivelano un mondo dove gli "errori" e i "fallimenti" sono in realtà dei comportamenti messi in atto sempre per una ragione e che come tali dovrebbero essere trattati in modo costruttivo, come manifestazione di qualcosa che avviene e non di qualcosa che manca. Un avvertimento e non solo una manchevolezza. Il segnale di un malessere cognitivo, come dicono gli Autori.

Siamo di fronte a un cambio di prospettiva di incredibile potenza. L'attenzione – e l'intenzione – si sposta dal voler colmare ciò che (l'insegnante) identifica come le conoscenze mancanti, al voler individuare e caratterizzare, anche in termini di conoscenza, ciò che sta accadendo all'allievo (e in aula). La forza motrice di tale spostamento è la capacità di mettersi in discussione – processo tutt'altro che facile e spontaneo. Gli innumerevoli esempi concreti che gli Autori presentano e commentano, accompagnano il lettore nel passaggio dall'uno all'altro punto di vista. È un cambio di prospettiva che può ispirare, tanto da far rendere conto di non poter – e non voler – più tornare indietro; se non per rileggere daccapo il libro.

Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica riesce a dare voce ad aspetti cruciali per il processo di insegnamento-apprendimento della matematica e trasmette un grande senso di umiltà e di rispetto per la complessità del tema trattato e per le persone coinvolte. Si prova rispetto per l'allievo che in un percorso di apprendimento significativo dovrà mettersi in gioco, assumersi responsabilità, acquisire consapevolezza, vivere conflitti cognitivi, esternare, difendere e mettere in discussione le proprie idee. Si prova rispetto per l'insegnante che, nell'esercitare la sua difficile e delicata professione, dovrà coraggiosamente essere pronto a mettersi in discussione in ogni istante con l'intelligenza e la professionalità che gli sono proprie. Si prova rispetto per la matematica, dietro la quale ci sono secoli di storia e i contributi di centinaia di persone che – ciascuna nel proprio contesto storico-culturale – con grande coraggio, e a volte anche con grande fatica, hanno portato avanti le proprie idee. Si prova rispetto per il ricercatore in didattica della matematica che, in questa dimensione così complessa, cerca di delineare con rigore scientifico i contorni del processo di insegnamento-apprendimento accogliendone e mostrandone tutta la complessità.

Per comprendere dunque il senso dell'espressione *difficoltà di apprendimento in matematica*, il volume ci mostra come ciascuno di tali elementi vada considerato opportunamente in tutte le sue declinazioni e, sin dai primi paragrafi, ciò viene fatto con cura, dedizione, profondità e ricchezza di esempi.

Gli Autori, nella premessa, si rivolgono al lettore-insegnante per il quale, di certo, il libro è uno strumento di crescita personale e professionale perché vi troverà informazioni e riferimenti essenziali per accogliere adeguatamente la complessità del tema trattato. Tuttavia, consiglio questo testo anche a molte altre categorie di lettori: il ricercatore in didattica della matematica, lo psicologo che si occupa di processi di apprendimento, l'educatore, l'editore, il politico, il genitore. In generale, consiglierei la lettura di questo libro a chiunque nell'ambito della noosfera voglia ampliare il proprio punto di vista accogliendo una visione olistica di ciò che riguarda l'insegnamento-apprendimento in matematica.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. (2019). *Zero*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Giovanni Giuseppe Nicosia

Zero, forse il più misterioso dei numeri, riveste un interesse speciale in molti ambiti. Senza dubbio è un oggetto matematicamente interessante ed è uno dei pilastri della cultura matematica internazionale, che lo sfrutta pesantemente nella scrittura di numeri in notazione posizionale. Quest'ultima è stata probabilmente uno dei fattori del progresso delle scienze, consentendo notazioni comode e algoritmi di grande efficacia. Parimenti cruciale è il suo ruolo nella storia della matematica, costituendo un percorso interculturale che riunisce quasi tutto il mondo.

E che dire delle difficoltà causate dallo zero nella didattica?

Gli Autori di questo libro, tra i maggiori esperti di ognuno dei campi citati, seguono il filo offerto dallo zero per un viaggio che li attraversa, mostrandocene le fondamenta.

In questo percorso trovano posto anche alcuni temi che sono in realtà, per moltissimi, dei dubbi dimenticati dall'infanzia: perché $a^0 = 1$? Perché non si può nemmeno scrivere sensatamente $a/0$? Perché la moltiplicazione di due interi negativi dà un intero positivo? Spesso è solo una coltre di abitudine e di rimozione a non farcene più stupire, anche quando, insegnanti, incontriamo la viva curiosità dei giovani allievi. Ecco che in questo libro l'insegnante trova strumenti necessari ad approfondire il suo lavoro, mentre lo studioso trova rigore epistemologico e storico, e il generico lettore curioso trova mille stimoli.

Tutti possono leggerlo anche in ragione dell'estrema semplicità e linearità dei ragionamenti: quando il discorso diviene troppo complesso o richiede troppi termini tecnici, gli Autori lo abbandonano dicendo "Noi qui ci fermiamo" e indicano riferimenti bibliografici per approfondire.

Ma a dispetto di tale semplicità di forme, il libro approfondisce temi complessi. Zero, le sue proprietà in alcuni dei diversi insiemi cui appartiene, le ragioni logiche e storiche della sua presenza divengono pretesti per esaminare gli aspetti più interessanti delle strutture che tali insiemi costituiscono con le operazioni cui intuitivamente ci crediamo legittimati a dotarli.

Una particolare attenzione viene dedicata alla motivazione di notazioni che sono ormai familiari a tutti e che, nella loro ovvietà apparente, creano poi conflitti cognitivi ed errori. Di errori tipici e significativi si affronta una lista lunghissima. Nella pratica scolastica diffusa, purtroppo, i provvedimenti adottati contro essi si riconducono spesso alla ripetizione schematica e chiara di regole: "si fa così". In questo libro molte di queste "regole" vengono riesumate, scrollando gli strati di abitudine sotto cui li abbiamo sepolti dopo anni di pratica, rivelando la loro natura stupefacente di proposizioni matematiche o di soluzione a problemi logici e concreti.

A fornire ulteriori motivazioni per oggetti e prassi che siamo abituati a usare, concorre anche la sezione storica. Zero percorre, in modo talora implicito, gran parte della storia delle più importanti civiltà. Una rassegna ricchissima delle sue interpretazioni matematiche e filosofiche viene qui estesa anche alle parole con cui zero viene indicato, con le loro connotazioni che le ricollegano ai contesti storici e sociali, e dunque al ruolo dello zero in culture e comunità del passato e del presente. Da artificio e strumento tecnico, zero prende il suo posto cruciale tra i numeri veri e propri in un processo che talora si ripete in diversi contesti storici.

Zero è un numero critico in campo didattico, ed ecco che gli Autori forniscono qui un arsenale di strumenti teorici che ne inquadrano il ruolo nelle concettualizzazioni degli allievi. Ma si passa subito alla pratica, con l'esame di alcune registrazioni di colloqui individuali e interviste collettive a bambini di scuola dell'infanzia e primaria sullo zero.

Il capitolo conclusivo riconduce tutto il materiale precedente ai principali elementi della didattica della matematica.

Su diversi piani quest'opera costituisce una lettura estremamente significativa in special modo per gli insegnanti.

Maierù, L. (2020). *Parlare di … matematica è possibile*. Roma: Aracne.

Recensione di Bruno D'Amore

Mi trovo di fronte a un libro formidabile, la cui lettura consiglio vivamente a tutti, matematici, docenti, allievi, curiosi. Si tratta non solo di una lunga, corposa, approfondita storia della matematica, ma di una lettura dotta, piacevole, ricca di sorprese colte.

I temi trattati sono solo apparentemente classici e tradizionali, hanno sempre qualcosa in più, temi di riflessione, e non solo dettagli:

- gli *Elementi* di Euclide e la loro influenza sugli studi relativi ai fondamenti della geometria, da Platone al Novecento, con riferimenti alla problematica dell'insegnamento della geometria;
- una rivisitazione dotta e profonda, ricca di spunti critici, dell'opera di Archimede, con una precisa cronologia delle traduzioni medievali e rinascimentali di tale opera;
- un'analisi dettagliata di parte dell'opera di Apollonio e la sua influenza nel mondo arabo (particolarmente dotta e ricca di spunti eccezionali) e fino al XVIII secolo;
- una narrazione fitta di citazioni interessanti e profonde dei lavori di Diofanto, Pappo, Sereno, Eutocio, mai vista in passato così completa e documentata;
- le relazioni fra geometria e algebra, il *metodo analitico*, dedicato alle posizioni (tutte perfettamente documentate), a partire dal mondo arabo e latino fino al XVI secolo e poi Viète, Descartes e Fermat, con la storia precisa della diffusione di queste conoscenze fino al XVIII;

- un esempio concreto di quel che significa “parlare di matematica”, avendo come esempio edificante la storia della costruzione dell’eptagono regolare, ricca di sorprese;
- un excursus storico sulla *mathesis universalis*, a partire da Wallis, fino alla costruzione dei numeri reali, dunque fine XIX secolo, ma con sconfinamento ai giorni nostri.

Lo scopo dichiarato dal nostro Autore è quello di mostrare che è possibile parlare di matematica, non solo raccontarla, ma farla vivere da parte di chi legge, mostrandone anche la bellezza. Non è una novità, questo scopo, dato che ricordo perfettamente un altro libro dello stesso Autore del 2017 il cui titolo è esplicito assai: *Della bellezza della matematica: Le tracce di un percorso di ricerca e di vita*.

Tutti argomenti già noti (dirà, potrebbe dire, qualcuno), già letti in altri libri di storia; sì, forse, quei nomi, quei fatti, quelle opere, quelle date sono già stati citati e trattati dallo stesso Autore e da tanti altri, storici o divulgatori. Ma questo libro è diverso, coinvolgente, dotto, pieno di citazioni precise e riferimenti storici completi, traduzioni perfette anche di testi i cui autori tutti citiamo ma sui quali, realmente, spesso sorvoliamo, senza assumerci la responsabilità di ricerche precise e documentate, fidandoci di quel che è già stato detto. Qui sono davvero presenti, citati e chiosati, a volte creando anche qualche (dotta) sorpresa. Confesso di aver letto alcune citazioni precise di autori arabi del Medioevo solo qui in maniera così esplicita e completa. E poi accostamenti arditi fra personaggi e tematiche che solo il gusto dello storico di classe, che vuole proporre una narrazione più che un saggio critico scientifico, può offrire. Il che stupisce il lettore, specie se non digiuno appunto di questi temi, di questi nomi, di questi autori, più d’un motivo di sorpresa, gradevole e ben accetta.

Appassionato come sono anch’io della narrazione matematica, delle sue sfaccettature sottili, delle relazioni interpersonali fra questi creatori matematici, della chiosa magica su relazioni sottili fra opere di autori e periodi diversi, che si richiamano non sempre in modo esplicito, ma i cui rinvii devi capire da solo, confesso che ho molto apprezzato la costruzione, l’architettura narrativa, il gusto per la sorpresa e la voglia di stupire. E confesso di aver più volte ammirato il fatto che l’Autore facesse di tutto per far capire (anche solo implicitamente) quel famoso anelito di libertà intrinseco alla matematica al quale diversi autori fanno cenno parlando della nostra disciplina, come Georg Cantor e Imre Toth.

Chi e come deve/può leggere questa narrazione?

Per esempio chi s’è trovato talvolta a dover spiegare a qualcuno (scettico) che la matematica è interessante, ha una storia appassionante, che il suo sviluppo assomiglia molto, come modalità, a quello di discipline considerate di tutt’altro genere come l’arte figurativa, per esempio; qui costui troverà esempi a non finire, più di 600 pagine di esempi. A meno che, come fece

André Weil rispondendo a una lettera della sorella Simone, non si limiti a dire: “tanto varrebbe spiegare una sinfonia a dei sordi”.

Un insegnante, per esempio, che vuol convincere i suoi studenti che la creazione della matematica è una storia senza fine fatta da esseri umani, non il prodotto della natura o di un demiurgo, ma il prodotto di pensieri profondi, legati a motivi che possono avere le derivazioni più diverse.

Un altro lettore che molto apprezzerà questa lettura è chi sa già abbastanza storia della matematica e l’apprezza, ma vuol sapere, almeno su alcuni temi e alcuni personaggi, dettagli precisi, citazioni esatte, riferimenti colti, relazioni fra matematici in quanto esseri umani; troverà di certo dettagli che mai aveva avuto occasione di conoscere prima, precisi, circostanziati, profondi.

Per lo studente generico di scuola, la lettura è forse troppo impegnativa; ma molti studenti universitari di matematica dovrebbero gustare la modalità narrativa, la sottile ironia che di tanto in tanto fa capolino, lo spirito colto e raffinato dell’evoluzione, così legata al dettaglio.

Auguro a questo volume il successo più pieno.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). *Per una teoria delle didattiche disciplinari: Saggio per docenti e ricercatori*. Bologna: Pitagora.

Prefazione di Maura Iori

Nella formazione professionale dell’insegnante di una o più discipline si fa spesso distinzione (a volte confusione) tra il contributo fornito dalla singola disciplina D oggetto di insegnamento, il contributo fornito dalla Didattica della disciplina D e quello fornito dalla Didattica Generale. La disciplina D, la Didattica di D e la Didattica Generale, come gli Autori esprimono con forza e chiarezza anche attraverso numerosi esempi, “sono necessarie alla preparazione di un docente di D, ma nessuna delle tre è sufficiente; insieme concorrono a tale preparazione”. Ma che cosa distingue l’una dall’altra? La preparazione nella disciplina (pura) D, di alto livello ma equilibrata e ben calibrata, è ovviamente imprescindibile, indispensabile, assolutamente necessaria, ma non include, non determina automaticamente, non garantisce, né esplicitamente né implicitamente, la preparazione nella Didattica di D, e tantomeno nella Didattica Generale. La disciplina D, la Didattica di D e la Didattica Generale sono tre discipline scientifiche differenti, anche se l’una dà, e riceve dall’altra, importanti strumenti concettuali e operativi. Come rilevano gli Autori, mentre la Didattica Generale discende storicamente dalla Pedagogia, Antropologia, Psicologia, Sociologia e Filosofia, la Didattica di D, assai più giovane della prima, scaturisce direttamente dalla Disciplina D, dalla Storia di D e dall’Epistemologia di D. Si parla dunque di Didattica dell'Inglese, Didattica dell'Italiano, Didattica della Filosofia, Didattica della Fisica, Didattica della Matematica, Didattica della Musica … a fronte di un'unica Didattica Generale. D'altra parte, ciascuna Didattica di D ha finalità formative di natura sia disciplinare, sia interdisciplinare o transdisciplinare, finalità che superano i confini, spesso artificiosi e capziosi, tra le varie discipline.

Allora perché, come propongono gli Autori, non costruire una teoria (*generale*) delle Didattiche disciplinari che risulti indipendente sia dalle *specificità* delle singole Didattiche disciplinari, ovvero dalle singole discipline D oggetto di studio, sia dalla *generalità* della Didattica Generale (nel senso evidenziato e condiviso dagli studiosi di Didattica Generale)?

In altre parole: È possibile concepire una generalizzazione delle Didattiche disciplinari che scaturisca dalle medesime Didattiche disciplinari e che, pur non riguardando le singole discipline in senso stretto, *non* si identifichi con la Didattica Generale, ma costituisca "un ponte tra la Didattica disciplinare e la Didattica Generale"?

In particolare: È possibile concepire una *teoria* (*generale*) *della Didattica disciplinare* indipendente dalle specificità della disciplina D – prendendo come base la Didattica della Matematica, ma includendo anche le altre Didattiche disciplinari – che permetta di superare l'annosa contrapposizione tra la Didattica Generale, che si focalizza principalmente sulle caratteristiche generali della pratica educativa comune a tutte le discipline, e la Didattica della disciplina D, intesa come Epistemologia dell'apprendimento di D?

Un'annosa contrapposizione che viene qui ricostruita, analizzata in profondità, descritta e chiarita con grande maestria e precisione sul piano teorico, ma sulla base di evidenze concrete, mettendo in evidenza problemi molto dibattuti e controversi, ma centrali e fondamentali, in particolare: (1) problemi di esistenza o di legittimità (della Didattica Generale e della Didattica specifica di ogni disciplina); (2) problemi di Epistemologia (in relazione alla dibattuta presenza di uno statuto epistemologico significativo alla base della Didattica Generale e/o della Didattica disciplinare) che derivano in gran parte dall'ambiguità del termine "epistemologia", suscettibile di almeno tre significati differenti, a seconda del contesto disciplinare o didattico considerato; (3) problemi di formazione (in campo educativo e in campo disciplinare).

Numerosi sono gli esempi tratti dal mondo della ricerca internazionale in Didattica della Matematica, esempi tutti facilmente generalizzabili o trasferibili ad altre discipline, che evidenziano l'esistenza di problematiche che non dipendono dalle specificità della singola disciplina D e che non sono neppure oggetto di studio della Didattica Generale; problematiche come quelle inerenti il riconoscimento e la gestione delle diverse clausole del contratto didattico e dei loro effetti, dei conflitti cognitivi o delle misconcezioni, delle immagini o dei modelli di un concetto, delle diverse tipologie di ostacolo (ontogenetico, didattico, epistemologico) all'apprendimento. Clausole, conflitti, misconcezioni, immagini, modelli e ostacoli di diversa natura che, interpretati in ciascuna Didattica disciplinare, permettono di chiarire e gestire efficacemente, e in modo trasversale, numerosi comportamenti, pratiche attese (come "l'apprendere quel che è stato stabilito a priori come conoscenza da apprendere") o devianti (come "l'apprendere come influenzare il giudizio di chi valuta si farà"); fenomeni e situazioni che fino a pochi anni fa potevano apparire inspiegabili o di scarsa rilevanza, ma che limitano fortemente, condizionano o alterano il processo di analisi dell'aula e la sua gestione, insieme alla valutazione del processo di costruzione di conoscenze o competenze disciplinari; un processo che, come gli Autori evidenziano in modo chiaro e incontrovertibile, "non può ridursi a un test per verificare la padronanza di qualche cosa di specifico", ben precisato, circoscritto o limitato nel tempo.

L'identificazione di tali problematiche costituisce il punto di partenza per la costruzione di una teoria generale della Didattica disciplinare che permetta il superamento delle ragioni profonde sia della contrapposizione tra la Didattica Generale e la Didattica disciplinare, sia delle rappresentazioni di relazioni di forte dipendenza o di subordinazione della Didattica disciplinare dalla disciplina D e dalla Didattica Generale.

Per esempio, Cramer e Schreiber (2018) sottolineano come nel passato la Didattica disciplinare sia stata descritta ricorrendo principalmente a "modelli di intersezione" (tra la disciplina scientifica D in questione e le Scienze dell'educazione, in primo luogo), a differenza dei modelli attuali che ricorrono soprattutto a relazioni di riferimento:

> Il declino dei modelli di intersezione può anche essere un'indicazione dello stato sempre più indipendente della disciplina dalla didattica della disciplina. Tuttavia, si deve presumere che non vi sia ancora una risposta definitiva e ampiamente accettata alla domanda su come la didattica disciplinare si colleghi alle discipline vicine come le scienze dell'educazione; il semplice numero e la diversità dei modelli utilizzati per descrivere la didattica disciplinare sottolinea questo punto. (Cramer & Schreiber, 2018, pp. 157–158)

Cramer e Schreiber (2018), a sostegno della loro tesi sulla mancanza di "una risposta definitiva e ampiamente accettata alla domanda su come la didattica disciplinare si colleghi alle discipline vicine", forniscono sei rappresentazioni diverse delle relazioni tra la didattica disciplinare e le scienze dell'educazione, proposte da studiosi tedeschi nel corso degli anni, dove la Didattica Generale compare esplicitamente solo in due di esse: prima (nel 1978) come disciplina a cui la Didattica disciplinare si ispira, poi (nel 2013) come ponte tra la Didattica disciplinare e le Scienze dell'educazione.

Una risposta esauriente, articolata e puntuale, ricca di dettagli, a questa e ad altre domande, si trova in questo libro. Un libro nel quale gli Autori, con grande maestria e profondità di argomentazioni, costruiscono lo "spazio concettuale" (Agazzi, 2014) di una nuova teoria scientifica, la teoria delle Didattiche Disciplinari, in sintonia con la Didattica Generale dei pedagogisti, prendendo come base la Didattica della Matematica, ma includendo le altre Didattiche disciplinari, almeno sul piano teorico.

Un libro colto, basato su risultati di ricerche condotte in Didattica della Matematica, ma scritto in uno stile scorrevole e coinvolgente, accessibile a un pubblico ampio; un libro ricco di esempi esplicativi ed efficaci, accompagnati da numerosi spunti di riflessione critica e di approfondimento, tutti di estremo interesse e facilmente trasferibili ad altre discipline.

Un libro, o meglio, un'impresa intellettuale e, allo stesso tempo, una sfida cruciale e affascinante che nasce dalla forte necessità di colmare un vuoto teorico di ricerca e di formazione assai avvertito, non solo dai ricercatori nelle varie didattiche disciplinari.

Riferimenti bibliografici

Agazzi, E. (2014). *Scientific objectivity and its contexts*. Cham: Springer International Publishing.

Cramer, C., & Schreiber, F. (2018). Subject didactics and educational sciences: Relationships and their implications for teacher education from the viewpoint of educational sciences. *Research in Subject-matter Teaching and Learning* (*RISTAL*), 1, 150–164.